

2017

Platonismes

Marco Panza

Chapman University, panza@chapman.edu

Follow this and additional works at: https://digitalcommons.chapman.edu/mpp_published_research



Part of the [Logic and Foundations Commons](#), [Logic and Foundations of Mathematics Commons](#), and the [Other Mathematics Commons](#)

Recommended Citation

Marco Panza. Platonismes. *Gazette des Mathématiciens*, 2017, 152, pp.23-41

This Article is brought to you for free and open access by the Mathematics, Philosophy and Physics Program at Chapman University Digital Commons. It has been accepted for inclusion in MPP Published Research by an authorized administrator of Chapman University Digital Commons. For more information, please contact laughtin@chapman.edu.

Platonismes

Comments

This is a pre-copy-editing, author-produced PDF of an article accepted for publication in *Gazette des Mathématiciens*, volume 152, in 2017 following peer review. This article may not exactly replicate the final published version.

This article is in French.

Creative Commons License



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution 4.0 License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).



Platonismes

Marco Panza

► To cite this version:

| Marco Panza. Platonismes. Gazette des Mathématiciens, 2017, 152, pp.23-41. halshs-03946791

HAL Id: halshs-03946791

<https://shs.hal.science/halshs-03946791>

Submitted on 19 Jan 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Platonismes

Marco Panza*

CNRS, IHPST (CNRS et Univ. Paris 1, Panthéon-Sorbonne)
Chapman University, Orange (CA)

February 24, 2017

1 Introduction, ou du Platonisme Naïf

Selon la vulgata philosophique, le platonisme concernant un certain domaine de recherche est la thèse affirmant que ce domaine concerne des objets qui lui sont propres, dont l'existence est indépendante de l'activité cognitive humaine. Souvent, dans la même vulgata on parle aussi de platonisme pour se référer à une thèse un peu différente, d'après laquelle ce qu'on dit concernant ce domaine est vrai ou faux indépendamment de toute justification ou réfutation que l'on puisse apporter. Naturellement, si parmi les énoncés ayant trait à ce domaine, il y en a qu'on peut prendre comme particulièrement surs du fait d'en avoir une justification ou confirmation particulièrement convaincante, on dira alors que le platonisme dont il est question affirme que ces énoncés sont vrais, et qu'ils le sont indépendamment de cette justification ou confirmation, qui ne servira, ainsi, qu'à nous convaincre de leur vérité.

Pour ce qui est des mathématiques, ceci revient à présenter le platonisme soit comme la thèse que

P.1. les mathématiques portent sur certains objets qui leurs sont propres — les objets mathématiques, comme on les appelle d'habitude — généralement conçus comme des objets abstraits, qui existent indépendamment de toute activité humaine,

soit comme la thèse que

P.2 les énoncés mathématiques sont vrais ou faux indépendamment de leur justification, et, en particulier, que les théorèmes mathématiques attestés sont vrais indépendamment de leur preuve, qui ne sert qu'à nous convaincre qu'ils le sont.

Naturellement, en parlant d'énoncés mathématiques en (P.2), on se réfère ici seulement à des énoncés appartenant à un langage exclusivement mathématique, des énoncés mathématiques pures, comme l'on dit souvent. Un énoncé tel

*Je remercie Jean-Pierre Ferrier, Damien Gayet, Gerhard Heinzmann, Daniele Struppa, les organisateurs et participants au MathCS Seminar at Chapman University, et un rapporteur anonyme pour leur aide et leurs commentaires à une première version de mon texte.

‘La tour Eiffel s’appuie sur quatre pieds’

n’est évidemment pas vrai indépendamment de toute activité humaine, alors qu’affirmer qu’un énoncé tel

‘La molécule de l’eau contient deux atomes d’hydrogène et un d’oxygène’

l’est ne relève certes pas du platonisme mathématique. Les énoncés dont il est question sont comme ceux-ci:

‘La limite d’une série convergente de fonctions continues définies sur un ouvert de $\mathbb{R}$ est une fonction continue sur cet ouvert’;

‘La matrice hessienne d’une fonction à valeurs réelles définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, \dots$) deux fois dérivable en un point a de cet ouvert est symétrique en a ’.

Pour le platoniste, la fausseté du premier ne tiendrait pas au fait que, *pace* Cauchy, il n’est pas démontrable, mais plutôt au fait que, indépendamment de Cauchy, Fourier, Abel et tout autre mathématicien, il admet des contre-exemples, alors que la vérité du second ne dépendrait pas de la preuve qu’en a donné H. Schwarz, ou de celles qui d’autres mathématiciens continuent à lui donner, mais plutôt des propriétés des nombres réels, de leurs intervalles et des fonctions de $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}$.

Ces deux exemples devraient suffire à suggérer que les deux thèses (P.1) et (P.2) sont strictement liées, au sens qu’établir une des deux peut servir à établir l’autre. Ceci fait qu’elles soient souvent prises comme devant être admises ou rejetées ensemble. Mais, si l’on voulait être plus précis, l’on devrait observer qu’elles ne sont nullement équivalentes: accepter l’une n’oblige nullement à accepter l’autre; si on voulait être platonistes (au second sens) quant aux thèses philosophiques, on pourrait supposer que l’une est vraie, alors que l’autre est fausse.

Certes, l’on pourrait plausiblement penser qu’il serait fort étranges qu’il soit ainsi (et même que des thèses philosophiques soient vraies ou fausses en dépendance de la manière dans laquelle les choses sont), mais ceci ne ferait que suggérer que les thèses (P.1) et (P.2) sont strictement liées entr’elles, mais pas qu’elles sont équivalentes.

De plus, les philosophes s’accordent souvent à accepter une thèse supportée par un argument qu’ils tiennent par correct, de telle sorte qu’il est fort possible qu’ils se trouvent dans la situation d’accepter une thèse pour vraie, sans avoir une idée bien claire de ce qui fait que les choses soient comme cette thèse le dit. Celle-ci pourrait être, par exemple, la situation de quelqu’un qui accepterait quelques versions de l’argument dit ‘d’indispensabilité’. En voici une, en simplifiant (pour d’autres versions et des formulations plus précises, cf. Panza & Sereni 2012): comme c’est un fait que des théories mathématiques sont indispensables pour des théories scientifiques (tenues par) vraies, ses théorèmes ne peuvent, à leur tour, qu’être (tenus par) vrais. Si accepté, cet argument établit que les théorèmes de ces théories mathématiques sont vrais, et il suggère qu’ils le soient indépendamment de leur preuve, mais il ne dit rien à propos de ce qui les rend vrais (la littérature récente sur les arguments d’indispensabilité est assez large, mais pour raisons d’espace on se contentera ici de cette mention rapide). On pourrait aussi imaginer des arguments, apparemment corrects, qui supportent ou réfutent une des deux thèses (P.1) et (P.2), mais qui n’établissent rien à propos de l’autre. Très récemment il m’est arrivé, par exemple, d’écouter un exposé (très brillant) de H. Field, un des opposants le plus persuasifs

du platonisme, où la thèse générale qu'il s'agissait de défendre a été présente ainsi: "même s'il y a des objets mathématiques, il n'y a pas d'objectivité mathématique (au sens que c'est pas un fait objectif que certains énoncés mathématiques soit "corrects" et d'autres pas), et ceci est tout ce qui importe" (exposé tenu à la Columbia University, New York, le 23 avril 2016).

Il convient, donc de distinguer les thèses (P.1) et (P.2), bien si, comme on le verra, elles ou leurs négations vont souvent ensemble. On notera aussi que le terme 'réalisme' et ses dérivés sont également bien souvent employés pour dénoter ces thèses: plus souvent (P.2) que (P.1), pour laquelle l'appellation 'platonisme' est la plus commune. On pourrait ainsi décider d'appeler la thèse (P.1) 'platonisme', et la thèse (P.2) 'réalisme'. C'est ce qu'avec mon coauteurs A. Sereni, on a suggéré dans notre *Introduction à la Philosophie des mathématiques* (2012; le lecteur est renvoyé à cet ouvrage pour des clarifications et/ou compléments à ce que je dirais par la suite). Mais ici, ce n'est pas question de bien fixer des noms pour un usage futur, mais de donner un panorama (forcément sommaire et incomplet) des conceptions que l'on pourrait trouver mentionnées sous le terme 'platonisme'. Il convient, donc, de garder le spectre sémantique de ce terme le plus large que possible. Convenons, donc, d'appeler (P.1) 'platonisme naïf des objets' et (P.2) 'platonisme naïf de l'objectivité' (les deux labels 'platonisme ontologique' et 'platonisme sémantique' sont aussi souvent respectivement employés pour dénommer ces thèses ou d'autres plus ou moins proches de celles-ci, mais je préfère ici les éviter pour ne pas donner l'impression de vouloir ancrer ma discussion à une distinction établie entre ontologie et sémantique, que la lecture devrait prendre comme étant acquise).

Mais pourquoi 'naïf'? Parce que, si on regarde de prêt autant l'histoire de la philosophie (des mathématiques) que la discussion philosophique contemporaine sur les mathématiques, on se rend compte que ces deux thèses n'ont pratiquement jamais été défendues, dans leur simple (ou plutôt simpliste) radicalité. Bien sûr, elles ont été très souvent mentionnées comme sortes de paradigmes ou slogans, pour introduire le sujet, ou pour se réclamer d'une attitude ou vue philosophique identifiée en général. Et elles ont très souvent fait aussi objet d'une critique, plus ou moins dévastatrice, et rejetées au nom de plusieurs arguments négatifs, principes généraux, conceptions métaphysiques, évidences venant de la pratique ou de l'histoire des mathématiques. Mais si cela a été ainsi, c'est, justement, du fait d'un vieux (et très souvent appliqué) principe de dialectique (au sens aristotélicien d'art de la discussion) suggérant de présenter une thèse dans la forme la plus simpliste et aisément réfutable, si on veut s'y opposer. Mais même si je voulais me servir de cette astuce, il resterait que mon but n'est nullement de réfuter le platonisme, mais d'exposer des idées qui s'y rapportent. Il convient, donc, de laisser jouer à ces thèses le rôle d'idéaltypes dépourvus d'une opérativité effective dans la discussion que nous intéresse, servant seulement à introduire les remarques qui suivent.

2 Platon

Le premier à ne pas admettre les thèses (P.1) et (P.2) dans leur simplicité radicale à été Platon lui-même, bien que le terme 'platonisme' soit évidemment inspiré à sa philosophie, en particulier à sa théorie de idées. Il n'y a pas de doute que: *i*) Platon a soutenu que les objets sensibles ne sont que des copies d'idées éternelles formant une réalité première et parfaitement indépendante de nous, à laquelle tout autre réalité se rapporte comme une image se rapporte à ce dont elle est l'image; *ii*) que ces idées n'ont aucune affinité avec ceux qu'on a plus tard appelé 'concepts', en étant bien plus proches de ce qu'on conçoit aujourd'hui comme des objets

abstrait. Il est donc parfaitement naturel d'appeler 'platonisme' toute thèse philosophique qui a trait à l'existence indépendante d'objets abstraits. Le problème est, cependant, qu'il est loin d'être clair ce que, à l'instar de Platon, on devrait prendre comme des idées (ou objets) mathématiques.

En un passage bien connu de la *République*, Platon semble vouloir dénigrer la pratique des mathématiciens en la traitant de corrompue en comparaison à une connaissance éternelle et parfaite qui constituerait les vrais mathématiques (*La République*, 527a-b; traduction de G. Leroux, légèrement modifiée, in: Platon, *Œuvres complètes*, Flammarion, Paris, 2011):

Or, le point suivant [...], même ceux qui ne possèdent qu'une expertise réduite de la géométrie ne nous le disputeront pas : cette connaissance est entièrement à l'opposé de ce qu'en disent ceux dont elle constitue le domaine. [...] Ils parlent de manière très ridicule et forcé, comme des praticiens, soucieux d'abord de leur pratique, et ils parviennent à toutes leurs propositions, en parlant de mettre au carré, ou alors d'appliquer et d'additionner, et en formulant tous leurs énoncés de cette manière, alors que toute la discipline vise la connaissance. [...] on étudie la géométrie en vue de la connaissance de ce qui est toujours, et non de ce qui se produit à un moment donné puis se corrompt.

Bonne partie de l'interprétation de ce passage dépend de la manière d'entendre les deux adjectifs 'ridicule' et 'forcé', 'γέλοιως' et 'ἀναγκάτως', en grec. Burnyeat (1987, p. 219) a suggéré de les prendre comme exprimants, respectivement, la nature métaphorique du langage des géomètres et l'inévitabilité de leur recours à un tel langage. C'est une interprétation que je partage. Loin de dénigrer la pratique des géomètres, Platon nous dirait ici qu'ils ne sauraient traiter des véritables objets de la géométrie qu'à l'aide d'un discours et des procédures qu'en contredisent la nature d'objets éternels, immuables et purement intelligibles, en les représentant à l'aide d'objets temporels, muable, et sensibles. On retrouverait alors ici la même opposition entre deux conceptions, ou, pour dire mieux, deux modalités de la connaissance: la connaissance parfaite du *Théétète*, qui resterait inatteignable par nous les hommes, du fait de sa transcendance; et celle autant imparfaite que provisoire du *Ménon*, consistant d'opinions que les hommes connectent les une aux autres par un discours qui, les liant entr'elles, leur donne stabilité, et fait de leur système une science. En d'autres termes, Platon opposerait ici deux conceptions des mathématiques: les mathématiques premières, conçues comme un système de vérités éternelles; les mathématiques secondes, conçues comme une pratique humaine donnant lieu à un système de résultats dont l'apparence de vérité ne dépende que de leur stabilité. On pourrait insister sur le pessimisme du *Théétète*, où la quête d'une caractérisation de la connaissance se termine par l'avoue d'un échec, pour souligner que les premières restent inatteignables par l'homme. Mais on pourrait aussi relire l'optimisme du *Ménon* à lumière de la métaphore du *Phèdre* — où Platon nous raconte que les âmes, ou du moins certaines d'entre elles, peuvent contempler les idées lors d'un voyage aux de là des ciels qui précède leur chute dans les corps mortels —, pour en conclure que les secondes doivent être conçues comme des bonnes copies des premières, autant bonnes que les hommes peuvent les avoir. Au fond, c'est bien dans le *Ménon* que Platon illustre sa théorie de la réminiscence par la parabole de l'esclave qui, par une démarche maïeutique, est amené à retrouver tout seul un cas particulier du théorème de Pythagore: si un bon maître peut, du moins apparemment, faire retrouver à un esclave trace d'une connaissance que son âme a perdu lors de la chute, le maître lui-même ne devrait pas

être si loin de pouvoir retrouver une bonne partie de cette connaissance par son travail et son étude.

Que reste-t-il dans ce cadre des thèses (P.1) et (P.2) ? Il ne semble pas y avoir de doute que pour Platon, il a des objets mathématiques, qu'ils sont abstraits et qu'ils existent de manière éternelle et immuable, et sont, donc, indépendantes de notre activité cognitive. Ce sont les idées qui ont trait aux mathématiques. Certes, mais de quels objets (idées) s'agit-il ? Les mathématiques auxquels ces objets ont trait ne peuvent être, par la définition même de ces objets, que les premières. Mais si c'est ainsi, rien ne peut nous assurer que ces objets sont exactement ceux sur lesquels semblent porter les énoncées ayant trait aux secondes. D'un côté, même si on s'accordait pour nier que le(s) langage(s) de celles-ci soi(en)t métaphoriques (par exemple en insistant sur le fait que les choses aujourd'hui ont profondément changé et qu'on est plus, dans les mathématiques moderne, au caractère proto-empirique de la géométrie grecque), il resterait que rien ne peut nous assurer que ce(s) langage(s) reflètent exactement la structure des mathématiques premières. La définition même de celles-ci fait qu'il soit impossible d'obtenir cette garantie.

Pour comprendre le problème ce n'est pas nécessaire de se demander, par exemple, si dans les mathématiques première on retrouve des ensembles ou des flèches. Déjà Platon l'avait vu.

Dans la *Septième Lettre* (342a-d), il distingue cinq facteurs dans l'acquisition de la connaissance d'un "être" : le nom de celui-ci ; sa définition ; son image ou représentation ; la connaissance elle-même ; et l'être lui-même. L'exemple qu'il fait est tiré de la géométrie : l'être est le cercle ; 'cercle' est son nom ; 'ce dont les extrêmes sont tous équidistants du centre' est sa définition ; un diagramme est son image ; ce qu'il y a dans l'âme à propos de celui-ci est la connaissance. Il est difficile de penser que le nom et la définition en question sont celles d'un cercle parmi d'autres. Ce dont Platon veut parler ne semble pas être un cercle, mais le cercle. Mais il est clair, alors, qu'aucun théorème de géométrie ne traite de ceci dans sa singularité d'objet. On bien on pense ces théorèmes comme tels à caractériser le concept (unique) de cercle ; ou bien on les pense comme traitant des cercles dans leur pluralité, quel que soit la manière dans laquelle cette pluralité est conçue. Quel sont, donc, les objets de la géométrie ? Le cercle, ou les cercles ? Le triangle ou les triangles ? Ou peut-être les polygones, ou les différentes sortes de polygones, ou la pluralité des polygones individuels ? Donc, ou bien le quatrième facteur n'est pas la connaissance du *Ménon*, mais celle du *Théétète*, et alors on la retrouve pas dans les traités de géométrie et on ne saurait rien dire de la manière dans la quelle elle est faite ; ou bien ce quatrième facteur est bien la connaissance du *Ménon*, celle qu'on retrouve dans ces traités, mais alors, ses objets ne sont pas ceux dont elle nous semble parler, si on reste, du moins, à la forme superficielle de ses énoncées.

On pourrait penser que le cas de géométrie est particulièrement difficile, du moins si on reste au cadre de la géométrie des *Elements*, où, en absence de toute structure de l'espace, ainsi que toute forme de définition implicite venant d'une axiomatisation, la distinction entre ce qui vaut comme un terme et ce qui vaut comme un prédicat reste fort imprécise. Mais les choses ne vont pas mieux, chez Platon, pour ce qui est du cas bien plus simple, sous cet aspect, de l'arithmétique des nombres entiers positifs. Autant dans le *Philèbe* (56d-e) que dans le *Théétète* (195e-196a), il distingue entre arithmétique pratique et pure, en les présentant comme celles dans lesquelles les unités respectivement diffèrent entr'elles — ainsi que, de deux boeufs, un diffère de l'autre —, et ne diffèrent pas entr'elles. C'est une manière assez naturelle de penser cette distinction, si on la rapporte à la définition des nombres (entiers positifs) qu'Euclide codifiera un peu plus tard dans les *Elements*, d'après la quelle un nombre est une "pluralité

d'unités" (def. VII.2), et une unité est "ce en vertu de quoi tout être est dit un" (def. VII.1). Mais elle n'est pas sans suggérer que pour Platon l'arithmétique n'a que l'unité comme son objet. Dans le *Gorgias* (451a-c), Platon distingue l'arithmétique pure de la logistique, elle aussi pure, en observant que toutes les deux traitent du paire et de l'impaire, mais la seconde tient à leurs grandeurs relatives. On pourrait comprendre, en modernisant, que la logistique calcule avec les nombres, alors que l'arithmétique se limite à étudier leur succession. Mais il reste que ce que Platon semble suggérer ici est que les seuls objets de l'arithmétique sont le pair et l'impair, conçus, on peut l'imaginer, comme deux formes distinctes de symétrie en une collection linéaire d'unités. Encore une fois, il serait difficile de retrouver ces objets traités comme tels en un traité d'arithmétique, du moins si l'on reste à la surface de son langage.

La difficulté à identifier les objets mathématiques conduit à une difficulté similaire à caractériser les vérités mathématiques. Certes, pour Platon, ce sont les mathématiques premières qui décident de ce qui est vrai et ce qui est faux dans les mathématiques secondes: c'est seulement en tant qu'ils reflètent, d'une forme ou d'une autre, les premières que les énoncées des secondes sont vrais. Mais ce que l'on vient de dire sur les objets mathématiques rend clair que rien ne peut nous assurer non seulement que ces énoncés sont vrais ou faux, mais aussi que leur vérité tient à leur forme superficielle: que ce qui fait qu'ils soient vrais soit que dans les mathématiques premières les choses sont ainsi que ces énoncées semblent dire qu'elles sont, si l'on reste à leur forme superficielle.

Plus qu'énoncer des thèses quant aux mathématiques, Platon semble ainsi nous poser un problème: comment peut-on espérer regarder aux mathématiques secondes, à la pratique mathématique, on dirait aujourd'hui, si on veut être capable d'y retrouver un reflex des mathématiques premières? Comment doit-on penser et identifier les objets mathématiques? Quelle structure doit-on assigner aux théorèmes mathématiques si on veut en faire des vérités?

La difficulté du problème tient au fait qu'il trouvent leur origine dans la tentative de satisfaire deux exigences difficiles à concilier: celle de rendre compte de l'apparente exactitude et incontestabilité des mathématiques en les regardant comme un système de vérités éternelles, décrivant un monde immuable d'objets transcendants soustraits à la corréabilité et au désordre des choses humaines; celle de rendre compte aussi du rôle active du mathématicien, de sa pratique quotidienne, de l'effort de produire des preuves et d'édifier des théories, en regardant les mathématiques comme (le résultat d')une pratique humaine, soumise aux limitations et aux imperfections de toute pratique humaine. Quiconque ait fait l'expérience des mathématiques d'une forme ou d'une autre ne peut que ressentir ces deux exigences. Les concilier est le problème principal que la philosophie des mathématiques rencontre, et l'importance de Platon pour cette dernière tient justement au fait d'avoir identifié cette difficulté.

3 Platonisme et Pratique Mathématique

Avant de continuer, il est bien de s'arrêter un instant sur un point important.

Pour un philosophe, concilier ces deux exigences signifie fournir un compte rendu plausible des mathématiques (soit en tant que système de vérités ou résultats attestés, soit en tant qu'activité) capable d'expliquer comment leurs apparentes exactitude et incontestabilité s'accroissent avec le rôle active du mathématicien et de sa pratique quotidienne (tout en admettent, évidemment, qu'un mathématicien est un être humain, sujet aux limitations cognitives de tout être humain). La difficulté du problème est celle de fournir ce compte rendu et

de faire en sorte qu'il soit plausible.

Mais il pourrait y avoir d'autres manières de concilier les deux exigences. Une, très courante parmi les mathématiciens, consiste à moduler leur pratique en accord à la supposition que celle-ci a trait à un système de vérités éternelles, décrivant un monde immuable d'objets donnés de manière indépendante, et que son bût est de découvrir ces vérités, de sorte à parvenir à décrire ce monde de manière de plus en plus complète et fidèle. Cette modulation peut s'accompagner d'une justification méthodologique raffinée, se réclamant d'un compte rendu du même type de celui que les philosophes cherchent à obtenir. En ce cas, le mathématicien joue le même jeu que le philosophe. Mais rien n'oblige que ce soit ainsi. Cette modulation peut aussi s'accompagner d'une justification plus sommaire, ne se réclamant, par exemple, que des thèses (P.1) et (P.2), ou même être spontanée, comme l'on le dit souvent (en parlant de platonisme spontané des mathématiciens): elle peut éviter toute justification autre que celle qui vient des succès obtenus en adoptant une certaine attitude.

Il y a plusieurs exemples typiques de cette modulation.

Un est l'admission inconditionnées des preuves indirectes fondées sur l'élimination de la double négation ou (équivalentement), sur le principe du tiers exclus. Plus en général, il s'agit d'admettre que l'argumentation mathématique se conforme à la logique classique et en hérite toute la puissance deductive. On pourrait penser que ceci n'est pas, à proprement parler, un choix positif, mais tout simplement le refus à se soumettre à toute limitation de cette puissance deductive requis par les partisans d'une logique non-classique, tels les intuitionnistes de différentes sortes, le constructivistes, le finalistes plus ou moins stricts, les prédicativistes, etc. Mais si on peut soutenir (en faisant preuve, d'ailleurs, d'approximation, sinon de superficialité historique) que la logique classique a une origine très ancienne, alors que les logiques non-classiques n'ont été conçues et se sont développée come telles, qu'à partir de la première moitié du siècle dernier (et, pour plusieurs, bien plus récemment), il est aussi loin d'être certain que les mathématiques d'avant de la seconde moitié du XIXème siècle ait *de facto* adopté toute la puissance deductive de la logique classique. Celle-ci a été conçue (du moins initialement) comme une logique du vrai e du faux, considérés comme des valeurs de vérité opposée et complémentaires, et rien n'assure que les mathématiciens de toutes les époques auraient accepté de penser leur pratique comme ayant trait au vrai et aux faux considérés de cette manière. Détailler cette remarque requerrait une enquête historique subtile qu'ici on ne peut même pas évoquer. Il suffira d'observe qu'il est bien difficile de trouver avant le XIXème siècle des preuves par l'absurde employant (consciemment ou pas) l'élimination de la double négation. Dans les *Elements* de Euclide, par exemple, les théorèmes prouvés par l'absurde sont généralement énoncés en forme négative, ou dérivés de négations appropriées. Par exemple, pour montrer l'existence d'une parallèle (prop. I.27), Euclide preuve que deux segments qui forment avec un troisième des angles alternes internes égaux ne se rencontre pas si prolongées, car si c'était ainsi un théorème précédent serait contredit. La forme de la preuve est donc la suivante

$$\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ B \Rightarrow C \\ \neg C \\ \hline \neg A \end{array}$$

qui n'utilise que le *modus tollens*.

Un autre exemple typique tient à l'admission que les énoncées indécidables des théories mathématiques incomplètes sont vrais ou faux, pourvu, naturellement, que les théories en ques-

tions fournissent une descriptions fidèle (encore que partielle) du monde des objets mathématiques. Il s'en suit que si ces énoncés sont mathématiques intéressants (c'est-à-dire, typiquement, qu'ils ne sont pas godeliens), ils appellent à une extension de la théorie permettant de les décider, quitte à devoir en conclure qu'elle ne fournit pas une description fidèle du monde des objets mathématiques. Un cas bien connu est celui de l'hypothèse du continu et de sa généralisation. Si ZFC fournit une description fidèle du monde des objets mathématiques, c'est-à-dire que ce monde est fait par (ou inclue) des ensembles satisfaisant les axiomes et définitions de cette théorie, alors autant CH que GCH doivent être soit vraies soit fausses. Il faut donc chercher à compléter ZFC avec des nouveaux axiomes non *ad hoc*, permettant de prouver soit CH soit $\neg$ CH, et soit GCH soit $\neg$ GCH. La difficulté de cette tâche pourrait n'être un symptôme que de la nature très complexe du monde des objets mathématiques, ou du notre extrême difficulté à le saisir. Mais si on commençait à douter que ceci est possible, on devrait en conclure que ZFC ne fournit pas une description fidèle du monde des objets mathématiques.

Plusieurs autres exemples seraient possibles. On pourrait mentionner l'acceptation inconditionnées des définitions imprédicatives, la confiance sans faille dans les logiques d'ordre supérieur, ou l'absence de tout scrupule à accepter des preuves transcendantes (des preuves prouvant un énoncé propre au langage d'une certaine théorie à l'aide d'autres théories), telles la preuve de A. Wiles du dernier théorème de Fermat, etc. Mais on devrait aussi observer que ces attitudes ne sont pas nécessairement la conséquence de l'acceptation, consciente ou pas, d'une forme de platonisme, et encore moins du platonisme naïf des objets et/ou de l'objectivité. De justifications non platonistes, ou relevant de formes plus sophistiquées ou moins radicales de platonisme sont imaginables pour eux.

4 Le Dilemme de Banacerraf

Ceci dit, revenons au fil principal de notre discours concernant la conciliation philosophique entre les deux exigences mentionnées à la fin du § 2. Une formulation moderne de ces exigences et des raisons qui rendent leurs conciliation difficile tient à ce que les philosophes contemporains appellent 'dilemme de Banacerraf' (Banacerraf 1973).

La première exigence est présentée comme étant celle qu' "une théorie de la vérité mathématique soit conforme avec une théorie générale de la vérité" (*ibid.*, p. 666). On pourrait douter qu'une telle théorie générale de la vérité soit possible ou souhaitable. Le point clef de la question n'est pourtant pas là. Au fond, ce que Banacerraf considère comme souhaitable est qu'on rende possible d'appliquer aux énoncés mathématiques une sémantique structurellement équivalente à celle des énoncés du langage ordinaire, en y ajoutant une distinction entre vérité et justification. Pour revenir à Platon, c'est la possibilité de traiter les énoncés mathématiques comme des descriptions putatives d'un monde d'objets dont l'existence et les propriétés sont indépendantes de toute manière de valider ces descriptions, ce qui ferait, justement, que ces énoncés soient vrais ou faux indépendamment de leur justification. L'exemple de Banacerraf est simple. Considérons les deux énoncés suivants:

'il existe au moins trois nombres parfaits plus grands que 17';

"il existe au moins trois villes plus anciennes que New York".

La première exigence est satisfaite si on en mesure d'assigner au premier énoncé la même structure sémantique qui est naturellement assignée au second de sorte que, comme le second,

aussi le premier puisse être considéré comme vrai en raison de l'existence indépendante de trois objets satisfaisant la condition relevante: dans le premier cas, celle d'être des nombres parfaits et d'être plus grands que 17.

La seconde exigence est présentée comme étant celle de se doter d'une explication plausible de la connaissance mathématique comme connaissance de ce que qui rend les énoncés mathématiques vrais: "puisque notre connaissance est une connaissance de vérités, ou peut être conçue comme telle", écrit Benacerraf "un compte-rendu des vérités mathématiques [...] doit être articulable avec la possibilité d'avoir une connaissance mathématique" (*ibid.*, p. 667). À première vue, c'est une exigence facile à satisfaire, du moins si on pense classiquement la connaissance comme une croyance vraie justifiée. Ce qui complique les choses est une condition supplémentaire, devenue claires à la suite d'un célèbre argument de Gettier (1963), sur lequel il serait impossible ici de revenir (mais qui a fait et fait objet d'une littérature philosophique immense). Benacerraf formule cette conditions comme suit: on sait que p seulement si la croyance que p "est liée causalement de façon appropriée à ce qui fait que p est vraie" (Benacerraf 1973, p. 672). Comme il a été souvent observé, la requête que le lien en question soit causale pourrait être omise, et Benacerraf lui-même est plus libérale peu après: "il doit être possible d'établir une sorte appropriée de connection entre les conditions de vérité de p [...] et les raisons pour lesquelles p est dit être connu" (*ibid.*), c'est-à-dire, entre ce qui fait que p est vraie, ou simplement que p , et la justification qu'on a pour croire (et affirmer) que p .

La discussion sur cette seconde exigence s'est concentrée sur ce qui pourrait faire que la justification de p soit fiable (*reliable*), dans les cas d'une justification d'un énoncé mathématique, pourvu que les énoncés mathématiques soient conçus comme la première exigence le prescrit. Mais je crois que c'est une erreur. Les mathématiques admettent des justifications d'une nature standard: les preuves et les arguments usuellement portés en faveur de l'admission d'un axiome ou d'une autre sorte de supposition liminaire. Si ces justifications ne sont pas fiables, rien ne l'est en mathématiques. La question est plutôt si ces justifications peuvent vraiment être prises comme des justifications de p , pourvu que p soit le contenu d'un énoncé mathématique au sens prescrit par la première exigence (p est ici une proposition, ce qui fournit le contenu d'un énoncé: ce que l'énoncé dit avoir cours). Il ne devrait pas être difficile de voir le problème: si un énoncé mathématique est une description putative d'un monde d'objets, alors un justification mathématique standard n'est une justifications de cet énoncé (de son contenu) qu'à condition qu'elle tient à ce monde d'objets, c'est-à-dire qu'elle soit apte à nous révéler comment ce monde est fait. Mais si l'existence et les propriétés des objets de ce monde sont indépendantes de toute manière de valider nos descriptions de ceci, comment peut-on être certain que c'est ainsi? On sait certainement prouver en ZFC que tout ensemble peut être bien ordonné (ou en ZF que le principe du bon order est equivalent à l'axiome de choix), mais si ce que l'énoncé 'tout ensemble peut être bien ordonné' nous dit est que tout habitant du monde des objets mathématiques qui a la propriété intrinsèque d'être un ensemble a aussi la propriétés intrinsèque que tout autre habitant de ce monde qui en est un sous-ensemble non vide a une élément minimal, alors il semble bien difficile de comprendre comment notre preuve en ZFC puisse établir que c'est vraiment ainsi. Cette preuve semble nous dire quelques chose de ZFC; mais pourquoi devrait-elle nous dire quelques chose du monde des objets mathématiques?

Qu'un mathématicien, quelle que soit sa compétence en théorie des ensembles (certainement énormément plus grande que la mienne), ne proteste pas. En tant que mathématicien il n'est aucunement en une position privilégiée pour nous assurer que ce soit ainsi, car le problème est justement ici celui de comprendre pourquoi la pratique argumentative des mathématiciens

devrait leur permettre d'accéder à un monde qui leur est par définition transcendent. C'est ce que les philosophes modernes appellent 'problème de l'accès'. Une forme de platonisme non naïf se doit de donner une réponse à ce problème, qui n'est, au fond, qu'une version modernisée de celui posé par Platon.

5 L'intuition Mathématique

Mais la protestation pourrait continuer. Les mathématiciens, on pourrait dire, ont, ou du moins cultivent, une faculté spéciale, que les autres êtres humains n'ont pas, ou ne cultivent pas: l'intuition mathématique. Beaucoup de mathématiciens et philosophes ont fait et font une partie importante à cette faculté: les noms de Poincaré, Brouwer et Gödel, pour ne pas mentionner Kant, ne sont que les premiers qui viennent à l'esprit. Mais la question ici n'est pas de discuter si l'intuition ait ou n'ait pas un rôle crucial à jouer en mathématiques, et c'est n'est pas non plus de se demander comment elle fonctionne, au juste. Il s'agit plutôt de se demander si l'on peut répondre au problème soulevée par Platon, et repris par Benacerraf, en se limitant à postuler que les mathématiciens possèdent une telle faculté, conçue non pas comme celle de trouver rapidement la solution d'un problème ou la preuve d'un théorème, ou celle de dépasser d'un seul coup les différents passages d'une démonstration, ou d'être au même de se réclamer d'une image (physique ou pas) pour remplacer un raisonnement complexe ou ennuyeux, mais plutôt comme une faculté qui permet de saisir le monde des objets mathématiques, sinon de manière complète, du moins de manière suffisante à garantir que les théories mathématiques en fournissent une description fidèle, encore que possiblement incomplète.

Personnellement, je n'ai pas cette faculté, et je n'ai pas la moindre idée de comment elle puisse fonctionner. Mais cela n'est pas surprenant, car je ne suis pas un mathématicien. Il se peut que d'autres l'aient, et qu'elle fonctionne très bien chez eux. Admettre ceci ne réglerait pas le problème, cependant. Car, si d'un côté il est parfaitement naturel de supposer que, si elle a lieu d'être, cette faculté est indissociable d'une pratique mathématique suivie, de l'autre côté il devrait être clair que sa postulation ne pourrait fournir une solution au dilemme de Benacerraf qu'à condition qu'on soit prêt à admettre qu'il ne soit pas à cette pratique qu'on doit sa survenance. Car on ne peut pas espérer expliquer comment cette pratique puisse permettre d'accéder au monde des objets mathématiques en postulant qu'elle conduit à la survenance d'une faculté qui garantie cet accès. Ceci serait tout simplement circulaire. Pour éviter toute circularité, sans vouloir dissocier, pour autant, intuition et pratique mathématiques, il ne resterait alors qu'à supposer soit que certains reçoivent cette faculté en cadeau et deviennent mathématiciens de ce fait, soit que certaines l'ont un jour reçue et ceci leur a permis d'accéder à ce monde et inaugurer une pratique qui a, ensuite, favorisé la survenance d'une faculté similaire chez d'autres, et ainsi de suite. Rien ne peut naturellement nous assurer que ce ne soit pas ainsi, mais il reste que répondre au dilemme de Benacerraf en faisant cette supposition serait comme expliquer un phénomène naturel par la survenance d'un miracle.

Malgré ceci, il est encore courant de penser qu'une théorie de l'intuition à la Gödel puisse fournir au platoniste une possibilité de répondre à ce dilemme. Encore que la notion d'intuition n'est certes pas la même chez Kant, Poincaré ou Brouwer, il reste que pour eux tous, ainsi que pour tout sorte d'intuitionniste, celle-ci est pensée comme une faculté active. Elle rend possibles des constructions ou garantit la possibilité d'une répétition indéfinie de certains actes, en donnant ainsi origine aux objets, ou du moins aux contenus mathématiques. Pour Gödel,

il ne semble pas que ce soit ainsi: l'intuition semble justement conçue comme ce qui permet de saisir quelques choses qui est déjà là. Voici ce qu'il écrit en un célèbre article consacré à la philosophie de B. Russell (Gödel, 1944, p. 133):

Les classes [...] peuvent bien être [...] conçues comme des objets réels, [...] comme des "pluralités de choses" ou des structures consistant en une pluralité de choses [...]. Il me semble que la supposition de tels objets est tout aussi légitime que la supposition des corps physiques et qu'il y a tout autant de raisons de croire en leur existence. Ils sont tout aussi nécessaires pour obtenir un système des mathématiques satisfaisant que les corps physiques sont nécessaires pour obtenir une théorie de la perception des sens qui soit elle-même satisfaisante.

Et quelques années plus tard en un autre article, autant célèbre, consacré à l'hypothèse du continu (Gödel, 1964, pp. 483-484):

Malgré leur étrangeté à la perception des sens, nous avons quelque chose comme une perception des objets de la théorie des ensembles, et l'on peut s'en rendre compte en constatant que les axiomes exercent une certaine force sur nous du fait de leur vérité. Je ne vois pas pourquoi nous devrions être moins confiant à l'égard de ce type de perception, c'est-à-dire de l'intuition mathématique, qu'à l'égard de la perception des sens.

Pour éviter la circularité signalée plus haut, sans se réclamer d'une sorte de miracle, il faut cependant aller bien au delà d'une déclaration de principe comme celles-ci: il faut immerger la notion d'intuition en un compte-rendu plus complexe, où l'appel à celle-ci n'apparaît plus comme la seule réponse au problème, mais plutôt comme un ingrédient d'une réponse plus complexe. C'est le cas, par exemple, des théories de l'intuition de Parsons (2008) et de Heinzmann (2013). Je reviendrai plus loin brièvement sur la première, mais pas sur la seconde, car elle pourrait difficilement s'encadrer dans une sorte de platonisme.

6 Logicisme et néo-logicisme

Une réponse totalement différente vient de Frege (1864 et 1893-1903) et des versions plus récentes de son programme logiciste. En 1903, quand il publia le second volume de son œuvre majeure, les *Grundgesetze der Arithmetik*, Frege savait déjà que, dans sa forme originale, sa réponse était viciée par une contradiction. Celle-ci avait été découverte par Russell, qui lui l'avait communiqué peu avant. On connaît différentes manières pour éviter la contradiction, dont une avancée par Russell lui-même, en collaboration avec A. N. Whitehead (1910-1913). Le problème est si ceci est faisable sans perdre la possibilité de présenter le système qui en résulte comme la pierre angulaire d'une solution du problème de Platon. Malgré ceci, et malgré la grande différence entre la thèse de Frege et le platonisme naïf, la position de Frege est souvent considérée comme l'archetype du platonisme mathématique. Ceci tient en large mesure à une sous-évaluation des plusieurs de ses ingrédients principaux, ceux, en particulier, qui font sa spécificité. Le principal tient au fait que cette réponse ne concerne que l'arithmétique des nombres naturels, et n'est nullement généralisable à d'autres branches des mathématiques, y compris la théorie des ensembles. Frege envisagea de suivre un parcours similaire pour les

nombres réels (et complexes), mais, comme on le verra, celle-ci aurait dû dépendre d'une transformation importante qui, même indépendamment de la contradiction de Russel et des transformations qu'elle requiert, aurait pu mettre en doute la possibilité de fournir une solution du problème de Platon.

L'idée fondamentale de Frege est que les nombres naturels sont des objets abstraits qui existent indépendamment de nous, car leur existence est indispensable à faire en sorte que certaines vérités logiques soient des vérités. Nous accédons donc à ces objets moyennement la découverte de ces vérités, ce qui tient à des preuves formelles au sein d'un système axiomatique qui révèle, de ce fait, la nature profonde de l'arithmétique. Ce qui est essentiel ici est que Frege prends ce système comme un système logique. S'il comporte des axiomes et des règles d'inférence, ceux-ci ne requièrent, donc, d'après lui, aucune justification spécifique autre que des arguments informels servant à en dévoiler la nature logique. Il s'ensuit que les nombres naturels ne sont pas seulement, pour lui, des objets abstraits; ils sont des objets logiques, et ceci fait que leur non-existence, ou leur existence sous une forme différente, ne sont simplement pas envisageables, de même qu'il n'est pas envisageable que ce qu'on démontre (ou on postule) en logique ne soit pas vrai. Le travail du logicien, prenant de ce fait la place de l'arithméticien, ne consiste, alors, qu'à dévoiler ce qui ne pourrait pas ne pas exister ou exister différemment, en démontrant des vérités logiques appropriées.

On ne peut pas, ici, entrer dans des détails. Il suffira de dire que pour Frege la logique est la théorie générale des objets et des concepts et se fonde toute entière sur la distinction entre objets et fonctions et sur l'admission de l'existence de deux objets particuliers, distincts entre eux: le Vrai et le Faux. Une fonction doit être pensée comme une matrice admettant une ou plusieurs places vides. Quand tous ses places vides sont remplies, — soit par des objets, pour une fonction de premier niveau, soit par d'autres fonctions, pour une fonction de niveau supérieur — elle acquiert une valeur qui est à son tour un objet. Un concept est une fonction à un argument (i. e. comportant une seule place vide) qui ne peut prendre comme valeur que le Vrai ou le Faux. Si la valeur d'un concept (du premier niveau) pour un certain objet comme argument est, respectivement, le Vrai ou le Faux, alors on dit que cet objet tombe ou ne tombe pas sous ce concept. Parmi les objets, il y en a d'un type particulier. Ce sont les extensions. Elles sont intimement liées aux concepts: toute extension est l'extension d'un concept, et deux concepts du premier niveau ont la même extension si et seulement si exactement les mêmes objets tombent sous eux: c'est la célèbre loi V de Frege, ou, pour être plus précis, un cas particulier de celle-ci (dit entre parenthèse: la contradiction découverte par Russel vient, en dernière instance, justement d'admettre ceci en même temps que de considérer que tout objet tombe ou ne tombe pas sous tout concept de premier niveau, c'est-à-dire qu'en tant que fonctions, ces concepts ont un domaine qui coïncide avec la totalité des objets).

Soit, alors, $[x : x \neq x]$ le concept sous lequel un objet tombe si et seulement s'il est distinct de lui-même. Sous ce concept aucun objet ne tombe. L'extension du concept $[z : \exists X [z = ext(X) \wedge X \approx [x : x \neq x]]]$ sur le quel tombent toutes (et seulement) les extensions des concepts équinumériques avec $[x : x \neq x]$ est naturellement un objet (deux concepts sont équinumériques si et seulement si les objets qui tombent respectivement sous eux peuvent être mis en bijection). D'après Frege, il est le nombre 0. Soit $[x : x = 0]$ le concept sous lequel ne tombe que 0. L'extension du concept $[z : \exists X [z = ext(X) \wedge X \approx [x : x = 0]]]$ sur le quel tombent toutes (et seulement) les extensions des concepts équinumériques avec $[x : x = 0]$ est le nombre 1. Soit $[x : x = 0 \vee x = 1]$ le concept sous lequel ne tombent que 0 et 1. L'extension du concept $[z : \exists X [z = ext(X) \wedge X \approx [x : x = 0 \vee x = 1]]]$ sur le quel tombent toutes (et seulement) les extensions des concepts équinumériques avec

$[x : x = 0 \vee x = 1]$ est le nombre 2.

Il serait facile de continuer indéfiniment. Mais Frege fait plus que cela. En simplifiant un peu:

- i) il définit en général le nombre (cardinal) $\#P$ d'un concept P comme étant l'extension du concept $[z : \exists X [z = \text{ext}(X) \wedge X \approx P]]$ sur le quel tombent toutes (et seulement) les extensions des concepts équinumériques avec P (de telle sorte que $0 = \#[x : x \neq x]$, $1 = \#[x : x = 0]$, $2 = \#[x : x = 0 \vee x = 1]$, ...);
- ii) il définit la relation de succession entre deux objets, et établissant que y est le successeur de x si et seulement si $\exists X \exists z [Xz \wedge y = \#X \wedge x = \#X^{-z}]$, c'est-à-dire qu'il existent un concept X et un objet z , tels que z tombe sous X , y est le nombre de X , et x est le nombre du concept d'être un objet distinct de z qui tombe sous X ;
- iii) pour toute relation binaire R , il définit l'ancestrale faible de R , ce qui est à son tour une relation binaire, disons R^{*-} , telle que $xR^{*-}y$ si et seulement si, pour tout concept X qui se transmet par R (c'est-dire tel que z tombe sous X si wRz et w tombe sous x), y tombe sous X si x le fait;
- iv) enfin, il identifie les nombres naturels aux objets qui sont avec 0 dans l'ancestrale faible de la relation de successeur, et il prouve que ces objets satisfont des conditions correspondantes aux axiomes de Peano (au deuxième-ordre).

L'existence indépendantes des nombres naturels en tant qu'objets logiques est ainsi assurée par leur identification avec des objets dont l'existence est assurée par les lois de la logique, qui nous permettent aussi d'accéder à ces objets en prouvant leurs propriétés.

Pour les nombres réels, aucune démarche similaire n'est possible, simplement car ils ne sont pas dénombrables. Frege aurait pu parvenir, bien sûr, à définir ces nombres par le truchement d'une extension appropriée du domaine des naturels, mais il préfère une autre stratégie, s'accordant avec ce que pour lui est un fait: que les nombres réels ne sont pas des cardinaux, mais des mesures de grandeurs. Il étend la notion d'extension d'un concept à celle d'extension d'une relation binaire (si $[x, y : \phi(x, y)]$ est une telle relation, $\text{ext}_x[x, y : \phi(x, y)]$ est un concept et $\text{ext}_y(\text{ext}_x[x, y : \phi(x, y)]) = \text{ext}[x, y : \phi(x, y)]$ est l'extension de cette relation) et se réclame de conditions logiques appropriées pour définir, parmi les extensions des ces relations, les extensions des permutations sur un domaine d'objets. Il impose ensuite à celles-ci d'autres conditions, et identifie les domaines de ces extensions satisfaisant ces conditions avec des domaines de grandeurs (ce qui, *mutatis mutandis* revient à demander qu'un tel domaine est un groupe additif totalement ordonné et Dedekind-complet). Enfin, il suggère d'identifier les nombres réels avec les rapports (définis par une version appropriée de la définition V.5 des *Elements* de Euclide) sur un domaine de grandeurs, en montrant que ces rapports forment des structures isomorphes quel que soit le domaine de grandeur sur lequel ils sont défini.

Même aux yeux de Frege, cette définitions ne fournit pas, cependant, aucune garantie que les nombres réels existent. Pour le prouver à l'aide de la seule logique, c'est-à-dire sans se réclamer de la supposition de l'existence d'un domaine de grandeurs non logiques, celui-ci suggère de construire un tel domaine de grandeurs à partir des nombres naturels, en supposant que la construction sauvegarde la nécessité de l'existence: pourvu que les nombres naturels existent nécessairement, aussi les rapports qu'on obtient de cette manière devraient, d'après lui, exister

nécessairement. C'est très astucieux (et en ligne avec une longue tradition historique opposant nombres et grandeurs), mais on peut douter que cette définition ait les mêmes propriétés de logicalité de celle des nombres naturels, et qu'elle permet ainsi de répondre au problème de Platon de la même manière que cette dernière.

Si la loi V n'est pas restreinte et on se donne la liberté de former des concepts $[x : \phi(x)]$ (et relations $[x, \dots, y, : \phi(x, \dots, y)]$) à partir de toute formule du langage, ce qui équivaut à admettre un schéma de compréhension non restreint, le système de Frege génère des contradictions, car, si c'est ainsi, cette loi assure l'existence de l'extension de tout concept ainsi formé, et donc aussi, par exemple, de l'extension du concept sous lequel sont censées tomber (toutes) les extensions d'un concept qui ne tombent pas sous ce dernier concept (et seulement ces extensions). Mais ce n'est pas facile de comprendre comment la loi V et/ou le schéma de compréhension peuvent être restreints de sorte à éviter toute contradiction et à sauvegarder en même temps la possibilité de définir les nombres naturels et réels d'une manière analogue à celle de Frege.

L'idée de Russell et Whitehead fut de hiérarchiser le système moyennement une partition en types et ordres. Mais cela ne permet de retrouver les définitions de Frege qu'à l'aide d'axiomes dont la nature logique est largement questionnable, ce qui conduit à perdre la nature logique de la définition. On pourrait penser que cela n'est pas grave. Et mathématiquement, il ne l'est sans doute pas. Mais si la définition des nombres naturels et réels qui en résulte ne peut plus être traitée de logique, l'argument de Frege pour assurer que ces nombres existent indépendamment de nous et que pouvons y accéder par notre théorie s'écroule (à supposer qu'il tient dans sa forme originale), et la réponse au problème de Platon tombe à l'eau. A plus fort raison ceci est naturellement le cas si le système logique de Frege — qui, en modernisant, est assimilable à une logique du second ordre avec compréhension plaine — est remplacé par la théorie des ensembles en une de ces formes. Dans ce cas, la consistance est (vraisemblablement) assurée, mais les nombres naturels et réels se trouvent à être identifiés avec des ensembles formant une structure appropriée, ce qui fait qu'il perdent toute apparence d'objet logiques. Sur ce point une clarification est peut-être nécessaire: le point ici ne tient pas aux difficultés inhérentes à la théorie des ensembles évoquées à la fin de la section 3; il tient simplement au fait qu'ils serait fort difficile d'arguer en faveur de la nature logique de cette théorie (ce que, d'ailleurs, personne n'a jamais fait, à ma connaissance), ce qui rend clair d'emblée que cette théorie n'a aucune chance de se soustraire au problème de Platon, et servir donc de point d'ancrage pour une solution de ce problème similaire à celle proposée par Frege.

Une nouvelle espérance pour un platonisme arithmétique à la Frege est, par contre, apparue lorsque C. Wright (1983) a observé que la définition de Frege des nombres naturels peut être répétée, *mutatis mutandis*, sans se réclamer de la notion d'extension d'un concept, et par conséquence, de la loi V. Il suffit de remplacer cette loi avec une autre du même type, dite (pour des raisons qu'il serait long d'expliquer) 'principe de Hume', et que Frege prouve à partir de la première. Une fois ce principe prouvé, la loi V ne joue plus aucun rôle essentiel dans sa définition. Ce principe affirme que le nombre (cardinal) $\#P$ d'un concept P est le même objet que le nombre $\#Q$ d'un concept Q si et seulement si P et Q sont équinumériques. Comme la condition d'équinuméricité est exprimable par une formule de la logique du second ordre (sans appel au schéma de compréhension), ce principe peut être ajoutée à cette logique come un nouvel axiome, fournissant une définition implicite des nombres des concepts. Ceci permet de définir les nombres naturels successifs juste à la manière de Frege (directement par $0 = \#[x : x \neq x]$, $1 = \#[x : x = 0]$, $2 = \#[x : x = 0 \vee x = 1]$, ...) et d'utiliser la définition précédente de la relation de succession, des son ancestral faibles et de la propriété d'être

un tel nombre, pour obtenir une théorie, dite ‘Arithmétique de Frege’, dont il est facile de prouver l’équiconsistance avec l’arithmétique de Peano (la littérature sur cette théorie et sur ces implications philosophiques est très large; je me limite à signaler ici: Boolos 1998; Hale & Wright 2001; Heck 2011; et, pour les lecteurs de la *Gazette*, Egré 2015). Dans cette théorie, il est aussi facile de retrouver comme des théorèmes les axiomes de cette arithmétique (naturellement au second-ordre) et les définitions usuelles de l’ordre, de l’addition et de multiplication, en ne réclamant que d’un schéma de compréhension Π_1^1 (ou Σ_1^1).

Plus récemment d’autres auteurs ont montré qu’il y a aussi manière de restreindre et/ou reformuler la loi V de Frege et/ou le schéma de compréhension, de telle manière à obtenir d’autres théories du second ordre, aussi équiconsistantes avec l’arithmétique de Peano, où la définition des nombres naturels de Frege peut être répétée en restant encore plus proches de l’original. Je ne mentionnerai que la suggestion très récente de F. Ferreira (à paraître). Heck (1996) a montré que si la loi V de Frege est laissée telle quelle, mais le schéma de compréhension est restreint à des formules Δ_0^1 (des formules sans quantificateurs du second ordre), le système de Frege devient consistant. Mais ce nouveau système est très faible, au sens qu’on ne peut interpréter dans lui que des petits fragments de l’arithmétique de Peano. Il suffit cependant d’ajouter au langage de ce système une seconde sorte de variables prédicatives monadiques et d’admettre un schéma de compréhension non restreint pour ces variables, tout en limitant la loi V à des variables de la première sorte, pour obtenir un système bi-sortal équiconsistent avec l’arithmétique de Peano, dans lequel on peut reformuler toutes les définitions de Frege et retrouver tous ses résultats. En d’autres termes, il ne suffit qu’une assez petite correction de la théorie de Frege pour dépasser l’objection meurtrière de Russell.

Est-ce qu’il suffit de se réclamer de ce système ou de l’arithmétique de Frege pour retrouver une solution plausible du problème de Platon pour ce qui est de l’arithmétique des nombres naturels, et, donc, une version acceptable du platonisme arithmétique? Alors que Ferreira ne le prétend nullement, pour ce qui est de son système, C. Wright et son plus étroit collaborateur, B. Hale pensent que c’est ainsi pour l’arithmétique de Frege. D’après eux, le principe de Hume est, en effet, une vérité analytique (tout en étant pas, *pace* Frege, un axiome logique), et ceci suffit pour s’assurer que les nombres naturels existent indépendamment de nous, en tant que cardinaux finis, que et nous pouvons les connaître en prouvant des théorèmes au sein de cette théorie. Cette thèse a donné et continue à donner lieu à une discussion vivace parmi les philosophes des mathématiques dont le point essentiel est de décider si l’arithmétique de Frege ait ou non un avantage essentiel sur celle de Peano, permettant de la considérer non pas comme une version de l’arithmétiques parmi d’autres, mais comme la véritable théories des nombres naturels existant en dehors de nous. Personnellement, je le crois pas, ainsi que je ne crois pas non plus que l’arithmétique de Frege puisse en quelques sortes se soustraire au problème de Platon, et fournir ce point d’ancrage pour une solution de ce problème, que, comme on l’a remarqué ci dessous, ne peut certes pas être fourni par la théorie des ensembles. Sur ce point, cependant, je ne peux ici que laisser au lecteur de se faire son idée.

7 Structuralismes

Une des aspects cruciaux du platonisme arithmétique de Frege qui reste intacte dans sa version moderne par Hale et Wright est qu’il se fonde sur l’identification des nombres naturels avec des objets abstraits d’une nature particulière qui sont supposés être donnés avant (et

indépendamment de) l'arithmétique elle-même. Pour Frege, ces nombres sont des extensions, en particulier les extensions de certains concepts. Il suffit de remarquer que les définitions mentionnées plus haut pour 1, 2, ... peuvent être réécrites ainsi $1 = \# [x : x = \# [x : x \neq x]]$, $2 = \# [x : x = \# [x : x \neq x] \vee x = \# [x : x = \# [x : x \neq x]]]$, ... pour comprendre que ces définitions sont, dans l'essentiel, indépendantes entre elles: selon ces définitions, la nature intrinsèque du nombre 37 ne dépend nullement de celle des nombres qui le précèdent dans l'ordre usuel; ce n'est que notre commodité d'exposition qui fait que nous le définissons à l'aide d'eux; cette définition ne dépende nullement de la relation d'ordre définies sur ces nombres. En d'autres termes: avant on identifie les nombres naturels, ensuite on définit sur eux des relations et opérations appropriées. En passant à la proposition de Hale et Wright, les choses ne changent pas sur le fonds. Ce n'est que l'image intuitive (ou informelle) que nous pouvons avoir de ce qui est le nombre (cardinal) d'un concept qui peut nous faire penser qu'un tel nombre est déjà défini comme un objet arithmétique. En réalité, il n'est rien d'autre qu'un objet associé à un concept par un principe qui ne dépende aucunement d'une structure d'ordre, additive ou multiplicative. Cela montre que selon ces deux conceptions, les nombres naturels sont conçus comme des objets donnés indépendamment non seulement de l'arithmétique, mais aussi les uns des autres. C'est en regardant leurs propriétés intrinsèques que nous découvrons (et montrons) qu'ils satisfont une ou plusieurs structures.

Ceci est une des choses qui font que le platonisme de Frege et de Hale et Wright est proche du platonisme entendu de manière traditionnelle, encore que bien plus sophistiqué de sa version naïve. Mais c'est aussi ce qui le rend vulnérable à un attaque difficilement parable. Une manière de le lancer est de se réclamer d'un autre argument de Benacerraf (1965): pourvu qu'autant l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$ que l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \dots\}$ peuvent être dotés d'une relation d'ordre, d'une addition et d'une multiplication leur permettent de satisfaire au axiomes de Peano (au premier ordre), il est naturel de se demander si les éléments de un de ces ensembles ne seraient pas les nombres naturels. Si la réponse est positive, il faudra dire si les nombres naturels sont les éléments du premier ou du second ensemble. Si elle est négative, il faudra dire pourquoi ils ne les sont pas, et pourquoi ceux d'un autre ensemble le sont. Il est clair qu'aucun argument, remarque, considération venant de notre pratique arithmétique peut nous aider à donner une réponse. Il semble donc que tout choix qu'on pourrait faire d'identifier les nombres naturels avec des objets particuliers, donnés avant (et indépendamment de) l'arithmétique, compris ceux de Frege et de Hale et Wright, est arbitraire, du moins du point de vue de la pratique arithmétique. Ce n'est pas surprenant, au fond. Car c'est justement ce que le problème de Platon signale. Mais ceci suffit à montrer que les réponses de Frege et de Hale et Wright à ce problèmes ne tiennent pas, si elles ne sont pas accompagnées autant d'une justification extra-arithmétique pour les choix dont elles dépendent, que d'une justification du fait d'accepter une justification extra-arithmétique (et probablement aussi extra-mathématique, *tout court*) pour un tel choix.

La réplique de Hale et Wright fait echo à celle que Frege lui-même aurait pu avancer: dans son essence le concept d'un nombre naturel est le concept du cardinal d'un concept (ou ensemble). Mais c'est vraiment ainsi? Et pourquoi? Et c'est vraiment le cas que ce concept ait une essence spécifique? Un passage célèbre tiré de *Was sind und was sollen die Zahlen?* de Dedekind (1888, § 73) suggère que ce n'est pas ainsi:

Si en considérant un système simplement infini N [ce qu'on appellerait aujourd'hui 'une progression'], ordonné par une représentation [ce qu'on appellerait aujourd'hui

‘une application’] φ on fait totalement abstraction de la nature particulière des éléments, que l’on ne retient simplement que le fait qu’ils sont différents et ne considère que les relations établies entre eux par la représentation φ qui définit l’ordre, alors ces éléments s’appellent ‘nombres naturels’ ou ‘nombres ordinaux’, ou encore tout simplement ‘nombres’, et l’élément fondamental 1 [dans le système de Dedekind les nombres naturels n’incluent pas le zéro ou élément neutre de l’addition], s’appelle ‘le nombre fondamental de la suite N des nombres’.

Dedekind continue en qualifiant les nombres naturels ainsi conçus de “libre création de l’esprit humain”, ce qui semble bien loin de l’esprit du platonisme. Mais ce n’est pas ce qui intéresse au présent. Le point est plutôt que ce que Dedekind suggère ici est que les nombres naturels (et, vraisemblablement, pour lui, tous autres entités mathématiques) n’ont pas des propriétés intrinsèques, ne sont pas des objets particuliers sur lesquels on définit une structure, mais sont les places mêmes d’une structure, indépendamment de toute possible exemplification que cette structure puisse avoir. L’argument de Benacerraf semble supporter cette conception, comme Benacerraf lui-même l’observe: il arrive même à soutenir que les nombres naturels ne sont certainement pas des objets, car tout objet a une nature particulière et les nombres naturels ne l’ont pas. C’est le point de vue usuellement dit ‘structuraliste’: les mathématiques ne traitent pas d’objets, mais de structures (pourvu que l’on puisse traiter des seconds sans traiter des premiers).

Les versions du structuralisme en philosophie des mathématiques sont plusieurs et très différentes entre elles. Ici on ne saurait même pas les lister. Je me limiterai à une question: le structuralisme en philosophie des mathématiques est nécessairement opposé au platonisme? Autant étrange que cela puisse paraître à première vue, la réponse pourrait être négative. Je vais considérer deux exemples.

Le premier concerne le “structuralisme *ante rem*” de S. Shapiro (1997; mais, pour une vue similaire, cf. aussi Resnik 1997). Selon Shapiro (*ibid.*, pp. 74-83), “une structure est la forme abstraite d’un système” et un système est “une collection d’objets ayant certaines relations”. Une structure est donc pensée comme un réseau connectant entre elles des places vides qui sont censées être occupées par des objets donnés entretenant certaines relations les uns avec les autres. Quand cela se réalise, le système formé par ces objets exemplifie la structure et celle-ci fournit au système sa forme. Mais non seulement la structure persiste lorsqu’un système qui l’exemplifie est supprimé, ou oublié (comme le propose Dedekind); elle existe aussi avant et indépendamment de tout système l’exemplifiant. Et ses places — les places elles-mêmes, non pas les objets que les occupent ou pourraient les occuper — sont les objets mathématiques, d’après Shapiro. Ceux-ci existent, donc, du fait de l’existence d’une structure. C’est une forme de platonisme structuraliste, comme Shapiro le revendique explicitement. Si l’on admet qu’une structure existe indépendamment de nous, ses places aussi, et donc les objets mathématiques, existent indépendamment de nous, et nous pouvons y avoir accès en étudiant la structure elle-même. Cette idée requiert une explication de ce que cela pourrait bien signifier pour une structure d’exister non seulement avant et indépendamment de tout système l’exemplifiant, mais aussi indépendamment de nous. On pourrait dire, en suivant Shapiro, qu’une structure est définie par un système consistant et catégorique d’axiomes, et que le fait même que ce système est établi permet à la structure d’exister avant et indépendamment de tout modèle qu’elle puisse avoir. Mais une telle structure n’existe pas, alors, indépendamment de nous, car il est difficile de penser qu’un système d’axiomes puisse être établi autrement que par des

hommes qui le conçoivent et le proposent.

Pour mieux préciser sa notion de structure, Shapiro présente une théorie des structures, inspirée par la théorie des ensembles, en particulière par ZF. Mais si une structure existe du fait des conditions fixées par cette théorie, elle ne semble pas non plus exister indépendamment de nous, non plus que les individus implicitement définis par une théorie axiomatique n'existent pas comme tels avant cette théorie. On pourrait penser, alors, que le structuralisme *ante rem* est une forme de platonisme qui ne demande pas que les objets mathématiques existent indépendamment de nous. Soit. Mais ce n'est pas tout, car il semble aussi nier que les objets mathématiques existent indépendamment des théories qui traitent d'eux, au moins si ces théories sont identifiées avec les systèmes axiomatiques qui définissent la structure dont ces objets sont des places. Si c'est ainsi, le problème de Platon est certainement résolu, mais au prix de renoncer bel et bien au première volet du dilemme de Benacerraf. Peut-être que le structuralisme *ante rem* est un compte-rendu approprié des mathématiques, en particulier, comme le souligne Shapiro lui-même, des mathématiques modernes, mais, *pace* Shapiro, on pourrait douter, alors, qu'il s'agisse d'une forme de platonisme: on connaît plusieurs formalisations de l'arithmétique admettent des modèles non isomorphes; il serait difficile d'admettre qu'elles définissent la même structure; donc elles ne traitent pas des mêmes objets, au sens de Shapiro, et il y aurait, ainsi, différentes sortes de nombres naturels, selon s'ils sont les places d'une de ces structures ou d'une autre: très mauvaise nouvelle pour un platoniste.

Mais il y a plus (Keränen 2001). Considérons une structure $\mathbf{S}$ admettant un automorphisme non trivial $g : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$ et supposons que a et b soient des éléments de $\mathbf{S}$, tels que $g(a) = b$. Il est clair que ces éléments ont exactement les mêmes propriétés structurelles. On devrait donc les prendre comme étant la même place dans la structure, et donc le même objet. Il suivrait, par exemple que $i = -i$, ce qui est évidemment contraire à toute théorie des nombres complexes. On peut répondre que pour un structuraliste *ante rem*, le seul fait que dans une telle théorie, l'on prouve que $i \neq -i$ suffit pour établir que i et $-i$ ne sont pas le même objet. Mais alors, un objet mathématique doit être quelques chose de plus qu'une simple place dans une structure. Mais quoi au juste?

Le deuxième exemple que je vais considérer donne, entre autres, une réponse à cette question. C'est le structuralisme de C. Parsons (2008). Celui-ci s'accorde avec Shapiro que les mathématiques modernes traitent d'objets structuraux, c'est-à-dire de places dans des structures conçus comme des objets, mais il observe que certaines de ces objets sont fixés avant l'établissement de la structure, et que, au contraire, celle-ci est justement conçue pour étudier ces objets et tant que ces places. Il s'agit, certes, d'objets abstraits, mais d'un type très particulier: Parsons les appelle 'objets quasi concrets'. Ils se caractérisent du fait d'être intimement liées, par une relation que Parsons appelle 'représentation' à des objets concrets qui participent à leur détermination et sont aussi essentiels pour leur identification.

Il y a plusieurs exemples non mathématiques de ce type d'objets. Un assez parlant tient aux phonèmes. Un phonème est sans doute un objet abstrait, mais on ne serait pas l'identifier autrement que par un son concret (ou un symbole qui renvoie à ce son).

Dans ce cas, et dans la plupart des cas non-mathématiques, il semblerait cependant que la relation entre un objet quasi-concret et son représentant concret n'est que celle d'un *type* à un *token* (c'est-à-dire, par exemple, d'une nouvelle, telle *Madame Bovary*, à une copie de cette nouvelle). Dans les cas des objets quasi concrets mathématiques, les choses sont un peu plus compliquées. L'exemple principal de Parsons concerne les nombres entiers positifs représentés, à la manière de Hilbert (1922, 1926) par des collections de traits: |, ||, |||, ... Si l'on considère, par

exemple que $|||$ et $|||$ ne sont que deux manifestations de la même collections, alors une collection de trait est un *type* et il est, à son tour un objet quasi-empirique. Mais si l'on considère qu'elles sont deux collections équivalentes, alors une collection de traits est un *token* de ce *type*, et il est donc un objet concret. Mais pour prendre une collection de traits comme un nombre entier, il ne suffit pas seulement de la prendre comme *type*, il est aussi nécessaire de définir la bonne relation d'équivalence sur ses *token*, et d'établir quelles sont les manipulations et observations qu'on peut faire sur ceux-ci qui correspondent à des opérations et des démonstrations sur les nombres. Une fois qu'on l'aurait fait, on disposerait d'une théorie élémentaire (et finitaire) des nombres entiers positifs, dans laquelle les théorèmes seraient prouvés en observant et en travaillant sur des collections de traits, ce qui manifeste, selon Parsons, une forme d'intuition ayant trait aux mathématiques. Cette théorie, quasi empiriques et intuitive, n'est certainement pas l'arithmétique de Peano dans toute son extension et sa puissance deductive, mais l'on peut penser que la première est à l'origine de la seconde, au sens que la seconde traite de la structure que la première exhibe, tout en la complétant de manière appropriée.

Les mathématiques grandiraient, ainsi, en passant de structure en structure: au stade le plus avancées ses structures fonctionneraient comme celles du structuralisme *ante rem*, au sens que les objets mathématiques ne seraient que leur places prises en tant que telles, mais autant ces structures que leurs places garderaient, pour ainsi dire, le souvenir d'autres structures, plus rudimentaires, qui ne seraient que des formes de système d'objets quasi concrets dont nous avons l'intuition. La différence entre i et $-i$ pourrait alors se faire remonter à l'origine de la théorie des nombres complexes, soit elle à chercher dans l'histoire de l'analyse ou dans celle de la géométrie. On a là, sans doute, une forme de platonisme, du moins du platonisme des objets, car, d'après ce compte-rendu, les mathématiques traitent d'objets abstraits. Mais l'existence indépendante de ces objets semble forte douteux. Tout au plus on pouvait considérer les représentants concrets des objets quasi concrets comme des artefacts qui, une fois produits, ne dépendent plus de ceux qui les ont produits. Mais il resterait que les objets quasi concrets eux mêmes, ainsi que leur théories n'apparaîtraient qu'une fois que des hommes auraient décidé de la manière de regarder à ces artefacts et de travailler avec eux.

8 Conclusions

On est certainement loin d'avoir mentionné toutes les versions du platonisme qui peuplent la philosophie contemporaine des mathématiques. Pour ne rester qu'à celles plus souvent discutées, on aura aussi pu traiter des applications aux mathématiques de l'*Object Theory* de E. Zalta (1893, 1999, et Linsky & Zalta 1995), ce qu'on pourrait considérer, à son tour, comme une forme de platonisme structuraliste, du "procéduralisme" de K. Fine (2005), du tout récent "trivialisme" de A. Rayo (2013), ou des plus classiques "platonisme pur sang" de M. Balaguer (1998) et "platonisme physicaliste" de P. Maddy (1990a, 1990b). Pour faire ce d'une manière appropriée, encore que sommaire, il faudrait, cependant, disposer d'un espace que je n'ai pas. Le lecteur intéressé pourra consulter directement les ouvrages de référence. Je voudrais en revanche terminer sur une note plus personnelle.

Ce qu'il me semble essentiel dans la position platoniste est le platonisme des objets, et, en particulier, la thèse que les théories mathématiques traitent d'objets (abstraites) qui leur sont indépendantes, de sorte que des théories différentes (et non équivalentes) peuvent traiter des mêmes objets. Cette thèse n'implique pas que ces objets existent indépendamment de notre

activité cognitive. Au sens habituel du verbe ‘exister’ — ce pour lequel l’on peu dire, avec Kant, que ‘existant’ n’est pas un prédicat — elle n’implique même pas que ces objets existent. Tout ce qu’elle implique est que ces objets soient fixés indépendamment des théories qui en traitent. Si l’on veut en tirer qu’ils existent, et, même qu’ils existent indépendamment de ces théories, alors on devra accepter que ‘exister’ signifie ici quelques choses d’assez particulier qu’il s’agira de clarifier. Mais pour notre but présent, très limité, on peut laisser ce point de côté. Il suffira de dire qu’un objet abstrait est, à mon esprit, un contenu intellectuel fixé, auquel on peut se référer dans nôtre langage, et auquel on peut accéder par nos pensées, et pour lequel on peut dire (en donnant à ceci un sens précis, qui pourra changer d’un domain à l’autre) que différents sujets épistémiques peuvent se référer et/ou accéder au même contenu.

C’est, par exemple, le cas de Emma Bovary, ou de son mari Charles. Je viens de me référer à eux par des noms propres. Et ce que je dis, quand j’affirme que si je parle de Emma Bovary et de son mari Charles, et que vous le faites aussi, l’on parle des mêmes choses, me semble très clair. De plus, il me semble que cette affirmation est vraie, du moins dans des circonstances habituels et par rapport à une communauté intellectuelle qui partage les éléments fondamentaux de la littérature française. Est ce que cela suffit pour en conclure que Emma Bovary et de son mari Charles sont des objets?

Si on voulait répondre que oui, je ne m’opposerais pas. Mais j’ajouterais alors qu’un objet mathématique est quelques chose de différent, je dirais de plus, qu’un objet au sens dans le quel Emma Bovary en est un. Car, le nombre 28, par exemple, n’est pas seulement quelque chose auquel je me réfère par le numéral que je viens d’écrire, et duquel je peux parler ainsi que vous le faites. Il est aussi un contenu que je peux prendre comme ayant étant fixé avant de dire de lui, ou même de découvrir, qu’il est un nombre parfait, et qu’il le plus grand des nombres parfaits plus petit que 100 et le plus petit de ceux plus grands que 10. Ce n’est pas de même pour Madame Bovary. Toute propriété qu’on peut lui attribuer (non arbitrairement) lui est essentiel au sense que lui l’attribuer fait partie de l’acte de fixer le contenu intellectuel qui porte ce nom. Certes, je peux avoir oubliée, ou ne jamais avoir su qu’elle fréquentait le *Lion d’Or*, mais Flaubert n’aurait pas fixé ce même contenu intellectuel s’il n’avait pas établi qu’elle le faisait. On pourrait protester: aussi 28, on pourrait dire, ne serait pas la même chose qu’il est s’il n’était pas un nombre parfait. On peut certes le dire. Mais cela me semble faux. Prenez les axiomes de l’arithmétique de Peano au second ordre. Il me semble suffisant de leur ajouter quelques définitions explicite du type ‘ $m =_{df} n$ ’ pour fixer ce contenu que nous dénotons par ‘28’. Mais cela ne suffit pas encore pour établir si ce nombre est parfait ou pas. Pour ce faire, il faut encore définir une addition et une multiplication sur l’ensemble des individus qui forment le domaines des variable individuelle qui interviennent dans ces axiomes. C’est sur ces individus qu’on définit ces opérations, ce qui est bien différent de dire que la définition de ces opérations participe à la fixation de ces individus.

Le philosophes distinguent une attitude propositionnelle *de re* qui a lieu quand de x l’on dit qu’il P , d’une attitude propositionnelle *de dicto*, qui a lieu quand l’on dit que x est P . En généralisant, je dirais alors que lorsqu’on on définit l’addition et la multiplication sur le nombres naturels au sein de l’arithmétique de Peano au deuxième ordre, on accède à ce nombres *de re*, non pas *de dicto*: on les prend comme étant là avant que la définition soit donnée.

Ceci étant dit, revenons sur un point mentionné ci dessus. On a dit que ce qui est essentiel dans la thèse platoniste est que les théories mathématiques traitent d’objets (abstraits) qui leur sont indépendantes, et que cela implique que ces objets sont fixés indépendamment des théories qui en traitent. Doit-on en convenir? Je crois qu’il faille distinguer. Ce qui est d’après

moi caractéristique des cette activité intellectuelle qu'on appelle 'mathématiques' est qu'elle a trait à des théories qui traitent d'objets fixés indépendamment d'elles. Mais cela n'impliquer pas que ce soit ainsi pour toute théorie mathématique. Certaines — le plus élémentaires, en un sens qu'il s'agirait de mieux éclairer — accomplissent plutôt la tâche de fixer des objets dont d'autres traitent aussi. On pourrait avancer, par exemple, que c'est le cas de l'arithmétique de Peano au deuxième ordre, dépourvue des définitions explicites de l'ordre, de l'addition et de la multiplication. Je ne m'engage pas sur ceci. Ce qui m'importe est qu'on me concède que ces nombres sont fixés de manière indépendantes de beaucoup de théories qui sont censées traiter d'eux. Par exemple de l'arithmétique de Peano au premier ordre, que je ne vois que comme ce qui résulte de l'effort d'étudier ces objets (de manière nécessairement imprécise) à l'aide des seules ressources d'un langage du premier ordre. A son tour, on pourrait penser l'arithmétique de Peano au deuxième ordre comme une manière de préciser et généraliser ce dont l'on parle dans l'arithmétique quasi-empiriques et intuitive de Hilbert, de sorte à permettre des quantifications (univoques) sur ces objets que dans cette dernière arithmétique n'auraient simplement pas de sens (car dans celle-ci les seules quantifications possibles sont métalinguistiques). Les mathématiques me semblent donc procéder par des fixations successives, de plus en plus précises, de contenus qu'on est bien légitimes à traiter d'objets, car c'est bien de ces mêmes objets qu'on continue à traiter en faisant des mathématiques plus avancées (encore, en un sens qu'il s'agirait de clarifier).

Soutenir que c'est ainsi, c'est, à mon sens, épouser une version du platonisme des objets qui, tout en requièrent encore beaucoup de clarifications, ne semble pas souffrir du problème de Platon. Mais, *quid*, alors, du platonisme de l'objectivité. C'est une question plus complexe, car pour l'aborder il faudrait rendre clair ce que 'vrai' et 'faux' signifient au juste en mathématiques. Laissez moi avouer que mes idées sur ce point sont encore trop confuses pour pouvoir indiquer une ligne de réflexion possible, même de la manière très vague et programmatique dans laquelle je viens de le faire pour le platonisme des objets. Pour paraphraser, en le renversant, le slogan de Field, cité dans l'Introduction, mon but n'est, par ces breves remarques conclusifs, que de suggérer cette thèse: même si les mathématiques ne sont pas objectives (et il est plausible de croire qu'elles ne le soient pas, complètement), il y a certainement des objets mathématiques (et ceci devrait permettre d'établir que les mathématiques sont au moins partiellement objectives).

Références bibliographiques

- Balaguer, M. (1998) *Platonism and Anti-Platonism in the Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, New York, 1998.
- Benacerraf, P. (1965) "What Numbers Could not Be", *The Philosophical Review*, 74,1, 1965, pp. 47-73.
- Benacerraf, P. (1973) "Mathematical Truth", *The Journal of Philosophy* 70, 19, 1973, pp. 661-679.
- Benacerraf, P. & Putnam, P., eds. (1964-1983) *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (N.J.), 1964 ; IIème édition 1983, Cambridge University Press, Cambridge.
- Boolos (1998), *Logic, Logic, and Logic*, Harvard University Press, Cambridge (Mass.), 1998.
- Burnyeat, M. F. (1987) "Platonism and Mathematics: A Prelude to Discussion", in A. Graeser (ed.), *Mathematics and Metaphysics in Aristotle*, Haupt, Bern et Stuttgart, 1987,

213-40.

Dedekind, R. (1888) *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Vieweg, Brunswick, 1888; traduction française, par H. Benis Sinaceur: “Que sont et à quoi servent les nombres”, in R. Dedekind, *La création des nombres*, Vrin, Paris, 2008, pp. 91-216.

Egré, P. (2015) “Le raisonnement par récurrence : quel fondement ?”, *La Gazette des Mathématiciens*, 146, 2015, pp. 27-37.

Ferreira, F. (à paraître) “Zigzag and Fregean arithmetic” à paraître, ms présenté au workshop *Ontological Commitment in Mathematics. In Memoriam of Aldo Antonelli*, IHPST, Paris (14-15 décembre 2015).

Fine, K. (2005) “Our Knowledge of Mathematical Objects”, in T. S. Gendler & J. Hawthorne (éds), *Oxford Studies in Epistemology*, vol. 1, Clarendon Press, Oxford, 2005, pp. 89-109.

Frege, G. (1884) *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logische mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Koebner, Breslau, 1884.

Frege, G. (1893-1903) *Grundgesetze der Arithmetik*, Pohle, Jena, 1893-1903 (2 vols.)

Gettier, E. (1963) “Is Justified True Belief Knowledge?”, *Analysis*, 23(6), 1963, pp. 121-123.

Gödel, K. (1944) “Russell’s Mathematical Logic”, in Schlipp P. A. (ed.), *The Philosophy of Bertrand Russell*, Northwestern University Press, Evanston (Ill.), 1944, 125-153.

Gödel, K. (1964) “What is Cantor’s Continuum Problem”, in Benacerraf, Putnam (1964-1983), pp. 258-273, 1ère éd.; 470-485, IIème éd.

Hale, B & Wright, C. (2001) *The Reason’s Proper Study. Essays towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 2001.

Heck, R. G. Jr. (1996) “The consistency of predicative fragments of Frege’s *Grundgesetze der Arithmetik*”, *History and Philosophy of Logic*, 1996, 17, pp. 209-220

Heck, R. G. Jr. (2011) *Frege’s Theorem*, Clarendon Press, Oxford, 2011.

Heinzmann, G. (2013) *L’intuition épistémique : une approche pragmatique du contexte de compréhension et de justification en mathématiques et en philosophie*, Vrin, Paris 2013.

Hilbert, D. (1922) “Neubegründung der Mathematik: Erste Mitteilung”, *Abhandlungen aus dem Seminar der Hamburgischen Universität*, 1, 1922, pp. 157-77.

Hilbert, D. (1926), “Über das Unendliche”, *Mathematische Annalen*, 95, 1926, pp. 161-90.

Keränen, Y. (2001) *The Identity Problem of Realist Structuralism*, *Philosophia Mathematica*, Series III, IX,3, pp. 308-330.

Linsky, B. & Zalta, E. (1995), “Naturalized Platonism versus Platonized Naturalism”, *The Journal of Philosophy*, 92,10, 1995, pp. 525-555.

Maddy, P. (1990a), *Realism in Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, New York, 1990.

Maddy, P. (1990b), “Physicalistic platonism”, in Irvine A. (éd.), *Physicalism in Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, 1990, pp. 259-289.

Panza, M. & Sereni, A. (2013) *Introduction à la Philosophie des Mathématiques*, Flammarion, Paris 2013.

Panza, M. & Sereni, A. (2016) “The Varieties of Indispensability Arguments”, *Synthese*, 2016, 193, pp. 469-516.

Parsons, C. (2008) *Mathematical Thought and Its Objects*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

Rayo, A. (2013) *The Construction of Logical Space*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2013.

Resnik, M. D. (1997) *Mathematics As A Science of Patterns*, Clarendon Press, Oxford, 1997.

Russell, B. & Whitehead, A. N. (1910-1913), *Principia Mathematica*, 3 Vols, Cambridge, Cambridge University Press.

Shapiro, S. (1997) *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology*, Oxford University Press, Oxford, New York, 1997.

Wright (1983) *Frege's Conception of Numbers as Objects*, Aberdeen University Press, Aberdeen, 1983.

Zalta, E. (1983), *Abstract Objects: An Introduction to Axiomatic Metaphysics*, D. Reidel, Dordrecht, 1983.

Zalta, E. (1999), "Natural Numbers and Natural Cardinals as Abstract Objects: A Partial Reconstruction of Frege's *Grundgesetze* in Object Theory", *Journal of Philosophical Logic*, 28, 6, 1999, pp. 619-660.